

<https://doi.org/10.18778/0208-6107.03.03>

Резо Григодия

О ФОРМУЛАХ m -ПЕРЕМЕННЫХ В ИСЧИСЛЕНИЯХ
ЛУКАСЕВИЧА

Многими авторами были описаны структуры неэквивалентных формул m ($1 \leq m < \aleph_0$) переменных в данном пропозициональном исчислении. Множество неэквивалентных формул m переменных в некотором пропозициональном исчислении может быть конечным или бесконечным. И. Нивимурой в [1] и Л. Ригером в [2] были даны бесконечная последовательность всех неэквивалентных формул одной переменной в интуиционистском исчислении, другими словами — свободная псевдобулева алгебра с одним свободным образующим (лестница Ригера-Нивимуры) является бесконечной. Уркхартом в [3] описаны свободные псевдобулевы алгебры с m свободными образующими. А. Хорном в [4] описаны свободные L -алгебры, соответствующие логике Даммета LC . Г. Эпштейном и А. Хорном в [5] описаны свободные P -алгебры с m свободными образующими; другими словами описана структура всех неэквивалентных формул m переменных в пропозициональном исчислении, соответствующем линейному фрагменту логики HB [6]. Свободная P -алгебра с m свободными образующими является конечной [5]. Свободные алгебры Поста описаны Цвингером в [7]. В [8] описаны структуры неэквивалентных формул одной переменной в модальных исчислениях $S4.3$ и D^*B [9] описана свободная D^* -алгебра с m свободными образующими. В. Шехтманом в [10] описаны свободные $S4$ -алгебры (алгебры с замыканием) и Gtz -алгебра (алгебры, соответствующие модальной логике $K.1.1$). В [11] описана свободная SD^* -алгебра с одним свободным образующим, SD^* -алгебры, являющиеся подклассом алгебр с сопряженными замыканиями [12], являются алгебраическими

моделями для бимодальной логической системы LinTGrz сформулированной К. Сегербергом в [13].

Алгебраическими моделями для бесконечнозначной логики Лукасевича L_{\aleph_0} служат MV -алгебры Чана [14]. MV_n -алгебры служат алгебраическими моделями для n -значной логики Лукасевича L_n ($2 < n < \aleph_0$) [15]. Целью данной работы является описание структуры всех неэквивалентных формул m переменных в L_n ($2 < n < \aleph_0$) и L_{\aleph_0} . Описание структуры всех формул m переменных в L_{\aleph_0} (соответственно в L_n) равносильно описанию свободной MV -алгебры (соответственно MV_n -алгебры) с m свободными образующими. Как будет показано ниже свободная MV_n -алгебра с m свободными образующими является конечной, а свободная MV -алгебра с m свободными образующими является бесконечной.

Статья состоит из трех частей. Первая часть посвящена предварительным понятиям и необходимым фактам, вторая часть — свободным MV_n -алгебрам с m свободными образующими, третья часть — свободным MV -алгебрам с m свободными образующими.

1. Предварительные понятия и необходимые факты

MV -алгебра есть универсальная алгебра $\alpha = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$, где A — непустое множество элементов, 0 и 1 — различные фиксированные элементы из A , $+$ и \cdot являются бинарными операциями на A и $-$ есть унарная операция на A , удовлетворяющие перечисленным ниже аксиомам:

- | | |
|--|---|
| Л1. $x + y = y + x$ | $x \cdot y = y \cdot x$ |
| Л2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ | $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ |
| Л3. $x + \bar{x} = 1$ | $x \cdot \bar{x} = 0$ |
| Л4. $x + 1 = 1$ | $x \cdot 0 = 0$ |
| Л5. $x + 0 = x$ | $x \cdot 1 = x$ |
| Л6. $\overline{[x + y]} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ | $\overline{[x \cdot y]} = \bar{x} + \bar{y}$ |
| Л7. $\overline{\bar{x}} = x$ | |
| Л8. $\overline{0} = 1$ | |
| Л9. $xvy = yvx$ | $xly = ylx$ |
| Л10. $xv(yvz) = (xvy) \vee z$ | $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ |
| Л11. $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$ | $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$, |
- где $xvy = (x \cdot \bar{y}) + y$, $xly = (x + \bar{y}) \cdot y$;
 $(m+1)x = mx + x$, $x^0 = 1$, $x^{m+1} = x^m \cdot x$.

Алгебра $\alpha = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ является MV_n -алгеброй ($2 < n < \aleph_0$)

если \mathcal{A} является MV-алгеброй и дополнительно выполняются следующие аксиомы:

$$\mathcal{A}12. (n-1)x + x = (n-1)x, \quad x^{n-1} \cdot x = x^{n-1},$$

При $n > 3$.

$$\mathcal{A}13. [(jx) \cdot (\bar{x} + \neg[(j-1)x])]^{n-1} = 0, \quad (n-1)[x^j + (\neg[x^{j-1}] \cdot \bar{x})] = 1,$$

где $1 < j < n-1$ и j не делит $n-1$.

Примером MV-алгебры служит алгебра $\mathcal{A}_{\Delta_0} = \langle R, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$, где R — множество всех рациональных чисел между 0 и 1, включая 0 и 1 для $\forall x, y \in R$ $x+y = \min(1, x+y)$, $x \cdot y = \max(0, x+y-1)$, $\bar{x} = 1-x$.
Примером MV_n -алгебры служит алгебра $\mathcal{A}_n = \langle R_n, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$, где $R_n = \{0, 1/n-1, \dots, n-2/n-1, 1\}$, для $\forall x, y \in R_n$ $x+y = \min(1, x+y)$, $x \cdot y = \max(0, x+y-1)$, $\bar{x} = 1-x$.

Как видим, классы MV-алгебр и MV_n -алгебр являются многообразиями (эквациональными классами), т.е. классами, замкнутыми относительно прямых произведений Π , подалгебр S и гомоморфных образов H . Многообразие всех MV-алгебр (MV_n -алгебр) обозначим через \mathfrak{M} (\mathfrak{M}_n).

Теорема 1. [14]. $\mathfrak{M} = \text{HSP} \{ \mathcal{A}_n \} \quad n = 2, 3, \dots$

Теорема 2. [15]. $\mathfrak{M}_n = \text{HSP} \mathcal{A}_n$.

Теорему 1 (Теорему 2) можно сформулировать следующим образом: многообразие \mathfrak{M} (\mathfrak{M}_n) порождается семейством $\{ \mathcal{A}_n \}$ (алгеброй \mathcal{A}_n) $n = 2, 3, \dots$

Теорема 3. [15]. Алгебра \mathcal{A}_k ($2 < k < \Delta_0$) изоморфна подалгебре алгебры \mathcal{A}_n ($2 < n < \Delta$) тогда и только тогда, когда $k-1$ делит $n-1$.

Из этой теоремы получаем, что \mathcal{A}_2 , являющаяся двухэлементной булевой алгеброй, является подалгеброй всякой алгебры \mathcal{A}_n .

2. Свободные MV_n -алгебры с m свободными образующими

Свободную алгебру в многообразии \mathfrak{M}_n обозначим посредством $F_m^{(n)}$. В качестве элементов алгебры $F_m^{(n)}$ можно взять различные m -местные функции алгебры \mathcal{A}_n (поскольку \mathcal{A}_n порождает многообразие \mathfrak{M}_n). Согласно Мак-Нотону [16] m -местная функция f принадлежит алгебре \mathcal{A}_n тогда и только тогда, когда для каждого набора $(S_1/n-1,$

$\dots, S_m/n-1)$, $0 \leq S_m \leq n-1$, общий делитель чисел $S_1, \dots, S_m, n-1$ является делителем S , где $S/n-1 = f(S_1/n-1, \dots, S_m/n-1)$.

На множестве $\{n: 2 \leq n < \infty\}$ определим функцию $\psi_m(k)$ следующим образом: $\psi_m(2) = 2^m$, $\psi_m(3) = 3^m - 2^m$, $\psi_m(n) = n^m - (\psi_m(i_1) + \dots + \psi_m(i_k))$, где $i_1 - 1, \dots, i_k - 1$ - все делители числа $n-1$, отличные от $n-1$.

Число различных m -последовательностей (т. е. элементов из \mathcal{X}_n^m) равно n^m . Функция f алгебры \mathcal{X}_n принимает определенные значения из \mathcal{X}_n . Поскольку \mathcal{X}_2 является подалгеброй всякой алгебры \mathcal{X}_n , то произвольная m -местная функция алгебры \mathcal{X}_n на m -последовательностях, компонентами которых являются элементы из \mathcal{X}_2 , принимает значение из \mathcal{X}_2 , т. е. либо 0, либо 1. Число различных m -последовательностей из \mathcal{X}_n , компонентами которых являются элементы из \mathcal{X}_2 , равно 2^m . А число различных функций алгебры \mathcal{X}_n , принимающие значения на этих m -последовательностях, равно 2^{2^m} . Если $n-1$ - простое число, то число различных m -местных функций алгебры \mathcal{X}_n равно $2^{2^m} \cdot n^{(n^m - 2^m)}$. Пусть $n-1$ - не простое число. Выпишем числа n_1, n_2, \dots, n_k в порядке увеличения, где $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1$ - все делители числа $n-1$ ($n_1 = 2, n_k = n$). Ясно, что алгебры $\mathcal{X}_{n_1}, \dots, \mathcal{X}_{n_k}$ изоморфны соответствующим подалгебрам алгебры \mathcal{X}_n (в дальнейшем изоморфные элементы будем отождествлять). Поэтому произвольная m -местная функция алгебры \mathcal{X}_n на m -последовательностях, компонентами которых являются элементы из \mathcal{X}_{n_i} ($i = 1, \dots, k$) принимает значения из \mathcal{X}_{n_i} . Принимая это во внимание, имеем, что число различных m -местных функций алгебры \mathcal{X}_n равно $n_1^{\psi_m(n_1)} \cdot \dots \cdot n_k^{\psi_m(n_k)}$.

Упорядочим элементы $F_m^{(n)}$ следующим образом: для любых $f, g \in F_m^{(n)}$ $f \leq g$ если и только если $f(a_1, \dots, a_m) \leq g(a_1, \dots, a_m)$ для всех $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{X}_n$. Поэтому множество элементов алгебры $F_m^{(n)}$ можно представить в виде диаграммы. В классе \mathcal{M}_3 множество элементов алгебры $F_1^{(3)}$ имеет диаграмму, изображенную на рис. 1.

Отметим, что для произвольного $n (2 \leq n < \aleph_0)$ элементы $g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_m^{(n)}$ порождают алгебру $\mathcal{X}_n^{U_m(n)}$, а элементы $G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, \dots, G_m^{(n)}$ порождают алгебру $\mathcal{X}_{n_1}^{U_m(n_1)} \times \dots \times \mathcal{X}_{n_k}^{U_m(n_k)}$. Действительно, функциям $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ алгебры \mathcal{X}_n соответствуют элементы $G_i^{(n)} (i = 1, \dots, m)$ (с точностью до перестановок компонент). Но функции $f_i (i = 1, \dots, m)$ являются свободными образующими алгебры $F_m^{(n)}$. Отсюда доказана

Теорема 4. Алгебра $\mathcal{X}_{n_1}^{U_m(n_1)} \times \dots \times \mathcal{X}_{n_k}^{U_m(n_k)}$ является свободной алгеброй в многообразии \mathbb{M}_n со свободными образующими $G_1^{(n)}, \dots, G_m^{(n)}$, где $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$ - все делители числа $n - 1 (n_1 = 2, n_k = n)$.

3. Свободные MV-алгебры с m свободными образующими

Как и в предыдущем пункте пусть $A = \{a : a \in \mathcal{X}_n^m \ \& \ a \in \mathcal{X}_{n_i}^m, i = 1, \dots, k; n_1 - 1, \dots, n_k - 1$ - все делители числа $n - 1$, отличные от $n - 1\}$. Перенумеруем элементы из $A : a_1, \dots, a_{U_m(n)}$. Обозначим через $g_k^{(n)}$ элемент $(\pi_k(a_1), \dots, \pi_k(a_{U_m(n)})) \in \mathcal{X}_n^{U_m(n)}$, $k = 1, \dots, m$, где π_k - проектирование на k -ый множитель алгебры \mathcal{X}_n^m . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_1 &= (g_1^{(2)}, g_1^{(3)}, g_1^{(4)}, \dots), \\ G_2 &= (g_2^{(2)}, g_2^{(3)}, g_2^{(4)}, \dots), \\ &\dots\dots\dots \\ G_m &= (g_m^{(2)}, g_m^{(3)}, g_m^{(4)}, \dots). \end{aligned}$$

Ясно, что $G_i \in \prod_{n=2}^{\infty} \mathcal{X}_n^{U_m(n)}$, $i = 1, \dots, m$. Рассмотрим подалгебру F_m алгебры $\prod_{n=2}^{\infty} \mathcal{X}_n^{U_m(n)}$, порожденной элементами G_1, \dots, G_m . Ясно, что алгебра F_m является счетной и, поэтому, собственной подалгеброй алгебры $\prod_{n=2}^{\infty} \mathcal{X}_n^{U_m(n)}$. Кроме того F_m является подпрямым произведением алгебр $\mathcal{X}_n^{U_m(n)} (n = 2, 3, \dots)$, так как проекция $\pi_i(G_k) = g_k^{(i)}$ порождает алгебру $\mathcal{X}_i^{U_m(i)}$. Следовательно F_m является подпрямым произведением алгебр $\mathcal{X}_n (n = 2, 3, \dots)$.

Теорема 5. Алгебра F_m является свободной алгеброй в многообразии \mathfrak{M} со свободными образующими G_1, \dots, G_m .

Доказательство. Ясно, что всякое равенство, записанное на m переменных, верное в \mathfrak{M} верно и в F_m . Пусть равенство $\varphi = \psi$, записанное на m переменных не верно в \mathfrak{M} . Тогда равенство $\varphi = \psi$ не верно в некоторой алгебре \mathcal{X}_k ($2 \leq k < \aleph_0$). Пусть a_1, \dots, a_m — элементы, на которых опровергается равенство $\varphi = \psi$. Породим подалгебру \mathcal{X}_n алгебры \mathcal{X}_k элементами a_1, \dots, a_m (ясно, что $n-1$ делит $k-1$). Существует гомоморфизм $h = h_2 \circ h_1$, где $h_1 = \pi_{n_1} \times \dots \times \pi_{n_k}$, где $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$ — все делители числа $n-1$, π_{n_i} — проектирование на n_i -ый множитель, алгебра F_m на алгебру $\mathcal{X}_{n_1}^{v_m(n_1)} \times \dots \times \mathcal{X}_{n_k}^{v_m(n_k)}$, h_2 — гомоморфизм $\mathcal{X}_{n_1}^{v_m(n_1)} \times \dots \times \mathcal{X}_{n_k}^{v_m(n_k)}$ на алгебру \mathcal{X}_n , причем $h_2(g_1^{(n_1)}, \dots, g_1^{(n_k)}) = a_1$. Поэтому равенство $\varphi = \psi$ опровергается в алгебре F_m на элементах G_1, \dots, G_m . Следовательно алгебра F_m является свободной алгеброй в многообразии \mathfrak{M} со свободными образующими G_1, \dots, G_m .

Литература

- [1] N i s h i m u r a I., On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus, J.S.L., 25 (1960), 327-331.
- [2] R i e g e r L., A remark on the s.c. free closure algebras, "Czechoslovak Math. Journal", 82 (1957), 16-20.
- [3] U r q u h a r t A., Free heyting algebras, Alg. Univ., vol. 3/1 (1973), 94-97.
- [4] H o r n A., Free L-algebras, J.S.L., 34 (1969), 475-480.
- [5] E p s t e i n G., H o r n A., P-algebras, an abstraction from Post algebras, Alg. Univ., vol. 4, j.2 (1974) 195-206.
- [6] R a u s z e r C., Semi-Boolean algebras and their application to intuitionistic logic with dual operations, Fund. Math., 83, N 3 (1974), 219-249.
- [7] D w i n g e r Ph., Free Post algebras and coproducts of Post algebras Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 20 (1972), 535-537.
- [8] K s a k i a L., R. G r i g o l i a., Christmas trees. On

- free cyclic algebras in some varieties of closure algebras, Bull. Sect. Log., Pol. Acad. Sci., 4, N 3 (1975), 95-102.
- [9] Григолия Р., Свободные D^* -алгебры с конечным числом образующих, IV Всесоюзная конференция по математической логике, Кишинев 1976, стр. 34.
- [10] Шехтман В. Б., Лестницы Ригера-Нинишмури, Докл. Акад. Наук., 241, № 6 1978, 1288-1291.
- [11] Григолия Р., Свободная циклическая алгебра в эквациональном классе, соответствующем бимодальной системе $LinTGrz$, Логика, Семантика, Методология, Тбилиси 1978, "Мицнереба" 100-112.
- [12] Зсакна Л., Семантический анализ бимодальных (временных) логических систем, Логика, Семантика, Методология, Тбилиси 1978, "Мицнереба", 87-99.
- [13] Segerberg K., Modal logic with linear alternative relation, "Theoria", 36, N 3 (1970), 301-322.
- [14] Chang C. C., Algebraic analysis of Many-valued logic, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 467-490.
- [15] Grigolia R., Algebraic analysis of Lukasiewicz-Tarski's n -valued logical systems, Selected Papers on Lukasiewicz Sentential Calculi, Ossolineum 1977, 81-91.
- [16] McNaughton R., A theorem about infinite-valued sentential logic, J.S.L., 16 (1951), 1-13.

Кафедра Философии
Тбилисского Государственного Университета

Rezo Grigolia

O FORMUŁACH M -ZMIENNYCH W RACHUNKACH ŁUKASIEWICZA

Тематика работы невязује до незмиерне важного нурту badań logicznych - badań algebr wolnych w klasie algebraicznych (matrycowych) modeli danego rachunku logicznego i uzyskiwanie charakteryzacji tzw. algebr Lindenbauma.

Rozważania prowadzone są w dwóch przypadkach: nieskończonej logiki Łukasiewicza i skończone wartościowych logik Łukasiewicza. W przypadku pierwszym algebraicznymi modelami są tzw. MV_n -algebry Changa, a w drugim zdefiniowane przez autora MV_n -algebry. Głównymi wynikami są: twierdzenie 4 podające kształt wolnej m -generowanej MN_m -algebry oraz twierdzenie 5, uogólniające ten rezultat na klasę algebr Changa.